Representación con imprecisión (I)
Fundamentos de lógica difusa

Bibliografía:

José Cuena. Sistemas Inteligentes. Conceptos, técnicas y métodos de construcción.
Facultad de Informática – Servicio de Publicaciones.
Fundación General de la UPM. Madrid, 1997

G. J. Klir, B. Yuan. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications.
Prentice Hall PTR. New Jersey, 1995

Índice
Representación con imprecisión

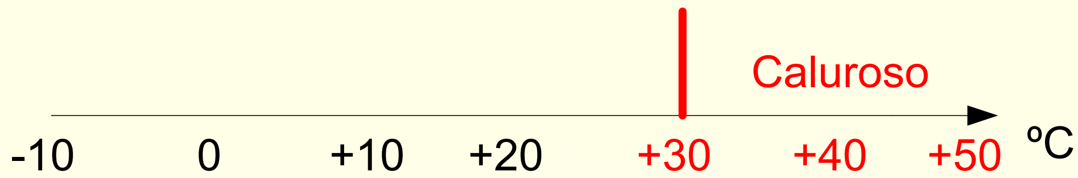
- Fundamentos de lógica difusa
- Razonamiento en lógica difusa
- Controladores difusos

Índice
Fundamentos de lógica difusa

1. Borrosidad, vaguedad, imprecisión.
2. Conjuntos borrosos.
3. Operaciones con conjuntos borrosos.

Conceptos (I)

- La lógica difusa permite representar conjuntos con fronteras no precisas.
- La afirmación “x pertenece a A” no es cierta o falsa, sino que medible mediante una posibilidad en [0,1].
- Permite manejar la vaguedad o imprecisión.
  - “Día caluroso”: la frontera entre caluroso y templado no es exacta



  - ¿Se puede suponer que si hay 30ºC el día es caluroso, pero si hay 29ºC entonces ya no lo es?

Conceptos (II)

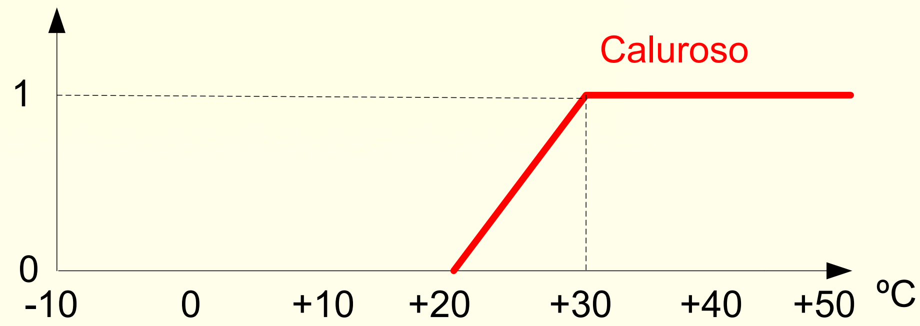
- Imprecisión: vaguedad, fronteras mal definidas.
- Incertidumbre: si lanzamos un dado hay seis posibilidades (precisas), pero no se desconoce qué saldrá.
- Aplicaciones de la lógica difusa:
  - Sistemas basados en el conocimiento.
  - Control difuso.
  - Reconocimiento de patrones.
  - Proceso de encaje en marcos.

Índice
Fundamentos de lógica difusa

1. Borrosidad, vaguedad, imprecisión.
2. Conjuntos borrosos.
3. Operaciones con conjuntos borrosos.

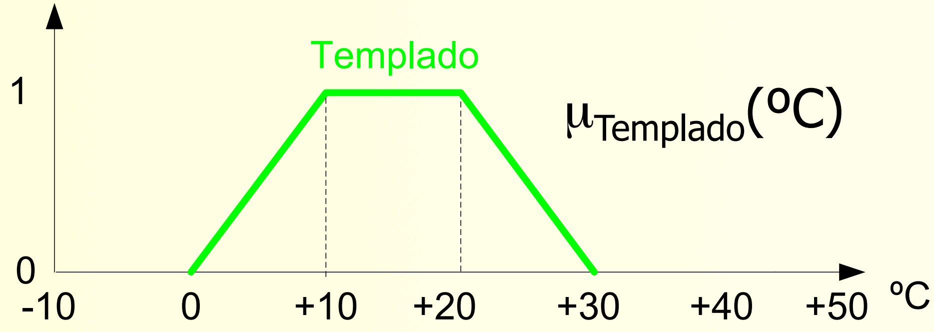
Conjuntos borrosos (difusos)

- Conjunto difuso: aquél en donde la pertenencia de los elementos se define mediante una función de pertenencia o función de distribución de posibilidad.
  - μ_A: X $\rightarrow$ [0,1].
    - El conjunto difuso A tiene una función de pertenencia $\mu_A(x)$ que asigna a cada valor $x \in X$ un número entre 0 (no pertenece) y 1 (sí pertenece).
    - Los valores intermedios representan pertenencia parcial.
- Ejemplo: $\mu_{caluroso}$: Tª $\rightarrow$ [0,1]:

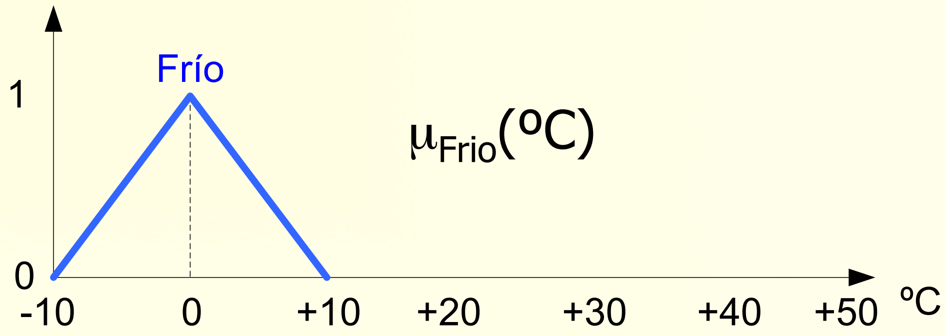


Distribuciones típicas

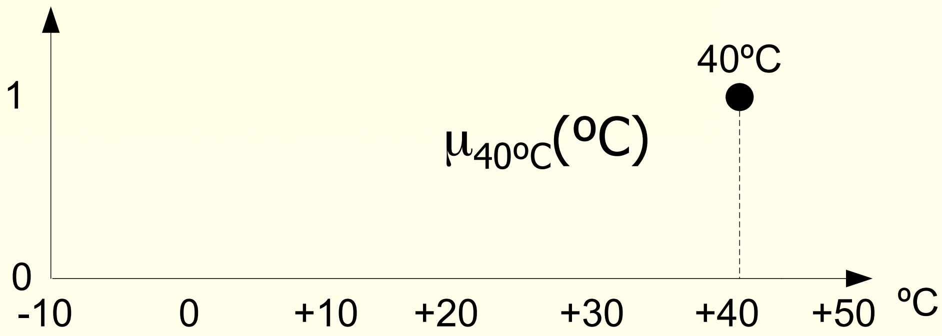
- Trapezoidales:



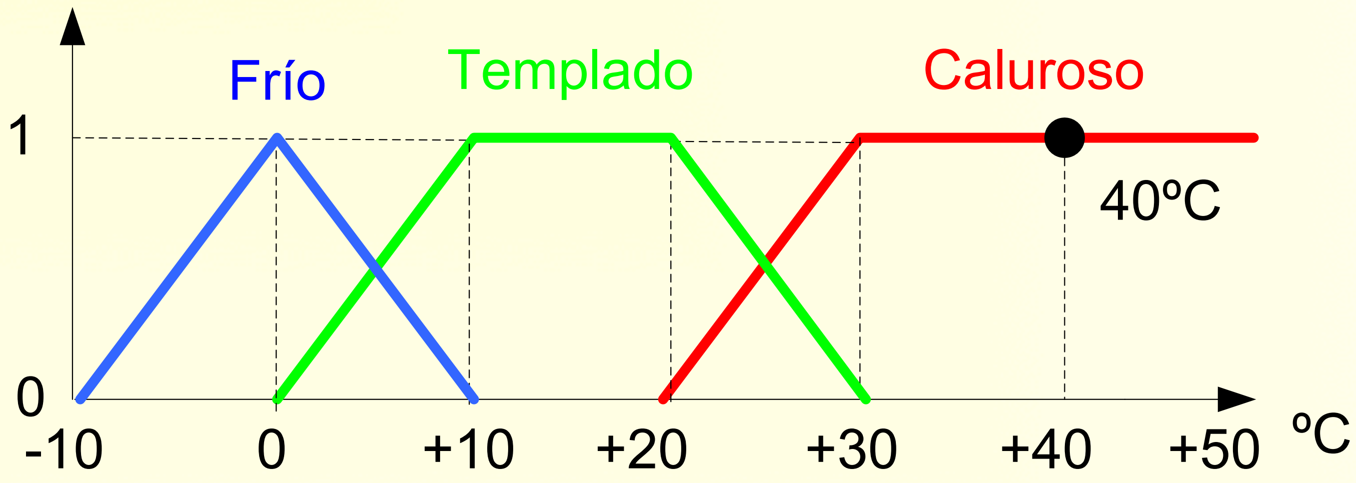
- Triangulares:



- Nítidas:



Ejemplo



$\mu_{Frio}(^{o}C)$ $\mu_{Templado}(^{o}C)$ $\mu_{Caluroso}(^{o}C)$ $\mu_{40^{o}C}(^{o}C)$

Índice
Fundamentos de lógica difusa

1. Borrosidad, vaguedad, imprecisión.
2. Conjuntos borrosos.
3. Operaciones con conjuntos borrosos.

Composición de fórmulas

- A partir de la cuantificación de la posibilidad de que sea cierta "x es p" expresado como μ_p (x):
  - x es p y q: $\mu_{p \wedge q}(x)$.
  - x es p ó q: $\mu_{p \vee q}(x)$
  - x no es p: $\mu_{\sim p}$ (x)
  - Si x es p, entonces x es q: $\mu_{p \to q}(x)$
- Generalización a n dimensiones:
  - $\mu_{p \wedge q}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mu_{p \vee q}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, etc.

Extensión cilíndrica

- Para componer dos funciones, deben estar referidas a las mismas variables:
  - No es posible componer x es p e y es q:

$$\mu_p(x) \wedge \mu_q(y)$$

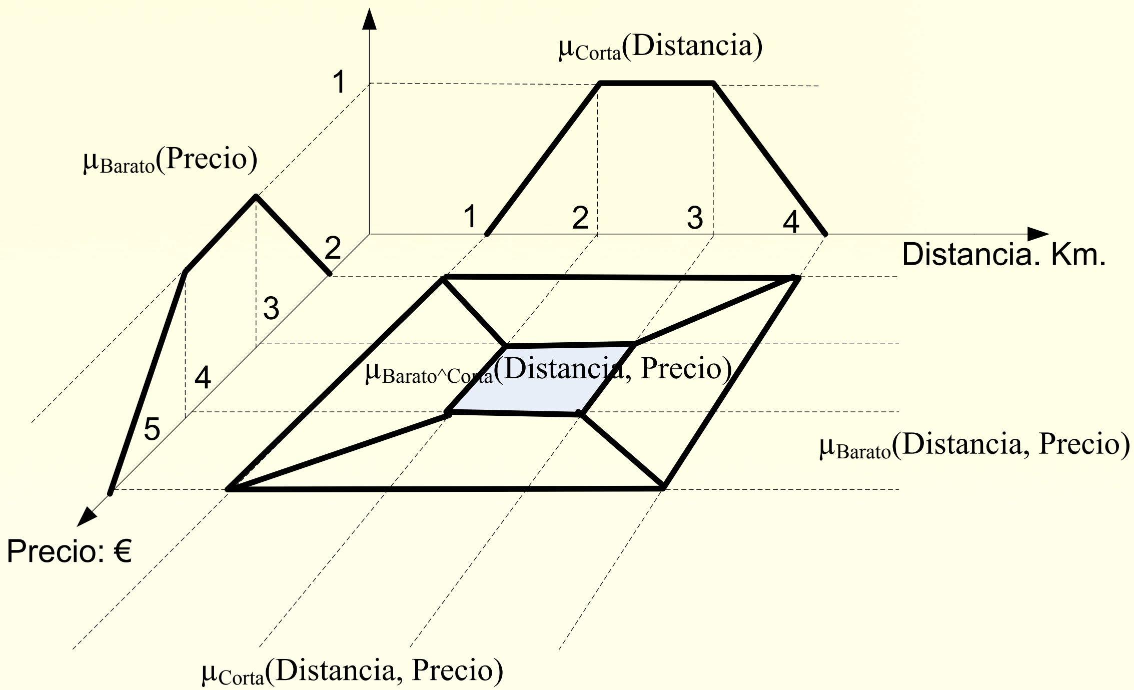
- Para ello se calcula la extensión cilíndrica de $\mu_p(x)$ con y, y la extensión cilíndrica de $\mu_q(y)$ con x para obtener $\mu_p(x,y)$ y $\mu_q(x,y)$.
  - Entonces es posible: $\mu_{p \wedge q}(x,y)$

- La extensión cilíndrica de $\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con y es $\mu(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ tal que cumple:

$$\forall\, y\ \mu(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = \mu(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Extensión cilíndrica. Ejemplo

- Se desea representar que la tarifa de un taxi es barata cuando la carrera es corta.
  - Se tiene μ_{corta}(distancia) y μ_{barato}(precio).
  - Se desea calcular $\mu_{corta \wedge barato}$(distancia, precio)



t-Norma, t-Conorma, negación

- Se manejan las siguientes funciones:
  - t-norma:
    - Conjunción (lógica), intersección (conjuntos)
    - T (x,y). $\mu_{p \wedge q}(x) = T(\mu_p(x), \mu_q(x))$
  - t-conorma:
    - Disyunción (lógica), unión (conjuntos)
    - S (x,y). $\mu_{p \vee q}(x) = S(\mu_p(x), \mu_q(x))$
  - Negación:
    - N(x). $\mu_{\sim p}(x) = N(\mu_p(x))$.

Funciones T: t-normas

- Es una función que devuelve un valor [0,1].
- Representa la conjunción o intersección.
- $\forall x, y, z \in [0,1]$ Propiedades:
  1. $T(x,1) = x$ (elemento neutro)
  2. $x \leq y \rightarrow T(x,z) \leq T(y,z)$ (monotonía)
  3. $T(x,y) = T(y,x)$ (conmutativa)
  4. $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$ (asociativa)
- Ejemplos:
  - $T(x,y) = \text{mín}(x,y)$ (mínimo)
  - $T(x,y) = P(x,y) = x \cdot y$ (producto)
  - $T(x,y) = W(x,y) = \text{máx}(0,x+y-1)$ (Lukasiewicz)
  - $T(x,y) = Z(x,y) = x$ si $y=1$; y si $x=1$; 0 resto (drástica)

Funciones S: t-conormas

- Es una función binaria que devuelve un valor [0,1].
- Representa la disyunción.
- $\forall x, y, z \in [0,1]$ Propiedades:
  1. $S(x,0) = x$ (elemento neutro)
  2. $x \leq y \rightarrow S(x,z) \leq S(y,z)$ (monotonía)
  3. $S(x,y) = S(y,x)$ (conmutativa)
  4. $S(x,T(y,z)) = S(T(x,y),z)$ (asociativa)
- Ejemplos:
  - $S(x,y) = \text{máx}(x,y)$ (máximo)
  - $S(x,y) = P'(x,y) = x+y-x \cdot y$ (suma-producto)
  - $S(x,y) = W'(x,y) = \text{mín}(1,x+y)$ (Lukasiewicz)
  - $S(x,y) = Z'(x,y) = x$ si $y=0$; y si $x=0$; 1 resto (drástica)

Funciones de negación

- Es una función unaria que devuelve un valor [0,1].
- Para que sea intuitiva debe cumplir $\forall\ x \in [0,1]$:
  1. $N(0) = 1;\ N(1) = 0$ (condiciones frontera)
  2. $x \le y \rightarrow N(x) \ge N(y)$ (inversión de monotonía)
- Ejemplos:
  - $N(x) = (1-x)$
  - $N(x) = (1-x^2)^{1/2}$

Dualidad

- Se dice que una t-norma y una t-conorma son duales con respecto a una negación sii:
  - N (T (x,y)) = S (N(x), N(y))
  - N (S (x,y)) = T (N(x), N(y))
- Son duales con respecto a N(x) = 1-x:
  - < mín(x,y), máx(x,y) >
  - < P (x,y), P'(x,y) >
  - < W (x,y), W'(x,y) >
  - < Z (x,y), Z'(x,y) >

Implicación difusa (I)

- Se han visto las operaciones:
  - T(x,y), S(x,y) y N(x)
  - Conjuntos:
    - Intersección, unión y complementario
  - Lógica:
    - Conjunción, disyunción y negación
- En lógica difusa se define la implicación a través de la función binaria J (x,y) que devuelve un valor [0,1].

$$\mu_{p \to q}(x) = J(\mu_p(x), \mu_q(x))$$

Implicación difusa (II)

- De la lógica clásica, se tiene que:
  - $A \rightarrow B = \neg A \vee B$
  - $J(x,y) = S\,(N(x),y)$.
- Tomando $N(x) = 1-x$, se tiene:
  - Con $S(x,y) = \text{máx}\,(x,y)$ $J(x,y) = \text{máx}\,(1-x,y)$
  - Con $S(x,y) = P'(x,y) = x+y-x\cdot y$ $J(x,y) = 1-x+x\cdot y$
  - $S(x,y) = W'(x,y) = \text{mín}\,(1,x+y)$ $J(x,y) = \text{mín}\,(1,1-x+y)$
  - $S(x,y) = Z'(x,y) = x$ si $y=0$; y si $x=0$; 1 resto

    $J(x,y) = y$ si $x=1$; $1-x$ si $y=0$; 1 resto

Implicación difusa (III)

- En la lógica clásica se cumple:
  - $A \vee B = A \vee (\neg A \wedge B)$
  - Puesto que $A \rightarrow B = \neg A \vee B$
  - Se tiene: $A \rightarrow B = \neg A \vee (A \wedge B)$
  - $J(x,y) = S(N(x), T(x,y))$
- Utilizando la negación $N(x) = 1-x$:
  - Con <min,max> $J(x,y) = \text{máx}(1-x, \text{mín}(x,y))$
  - Con <P , P'> $J(x,y) = 1-x + x^2y$
  - Con <W, W'> $J(x,y) = \text{máx}(1-x, y)$
  - Con <Z, Z'>

    $J(x,y) = y$ si $x=1$; $1-x$ si $x\neq 1$ $y\neq 1$; 1 si $x\neq 1$ $y=1$
  - $J(x,y) = \text{mín}(x,y)$. Implicación de Mamdani

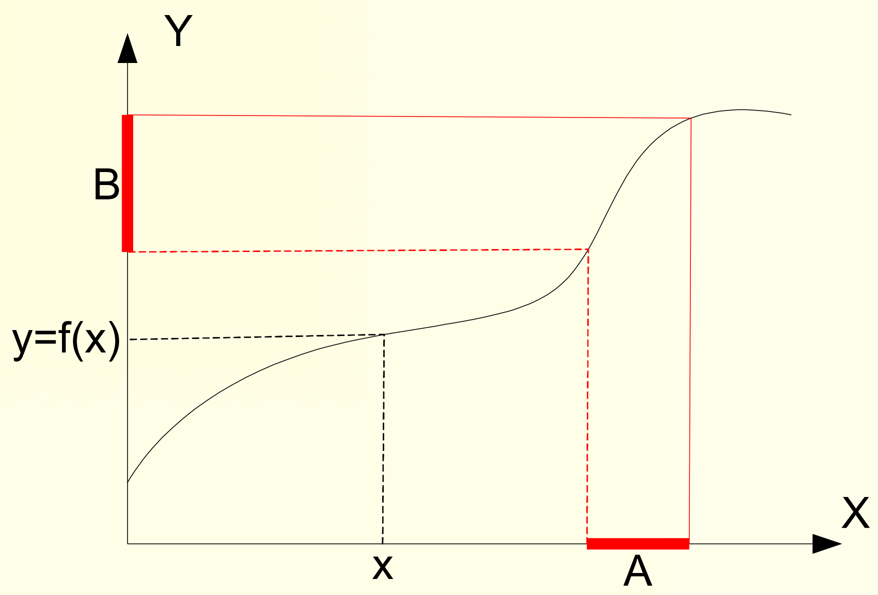
Índice
Representación con imprecisión

- Fundamentos de lógica difusa
- Razonamiento en lógica difusa
- Controladores difusos

Razonamiento sobre teoría de conjuntos (I)

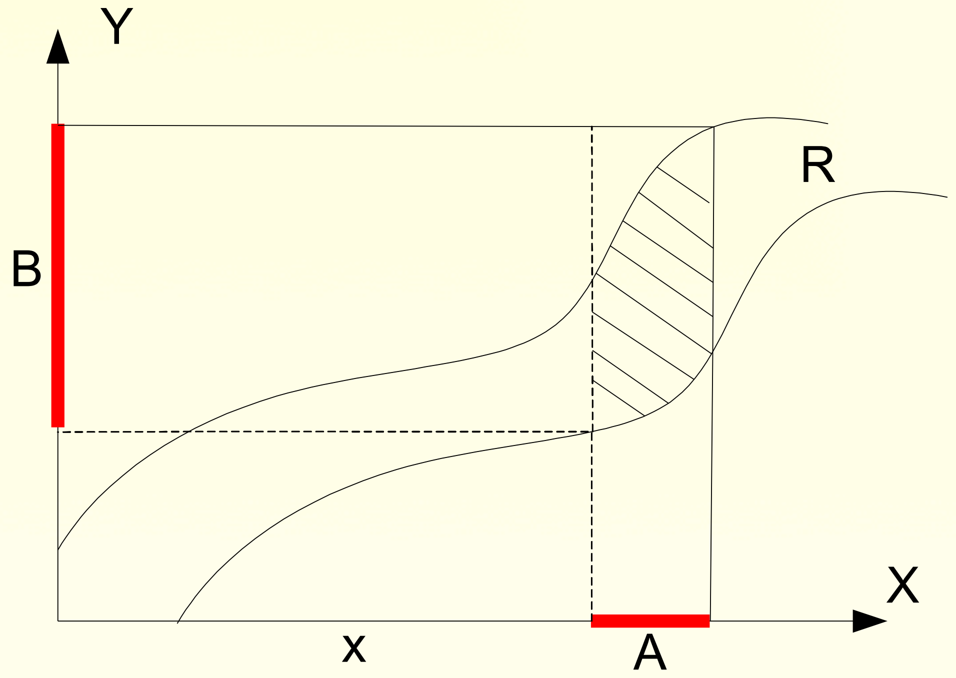
La inferencia en conjuntos clásicos se puede ver de la siguiente forma:

- Dados X e Y dos conjuntos.
- La relación entre ambos viene dada por la función f(X).
- Dado un valor X=x, se puede inferir y=f(x).
- Dado un subconjunto $A \subset X$, se puede inferir el subconjunto $B \subset Y$: $B=\{y \in Y \;/\; y=f(x),\, x \in A\}$



Razonamiento sobre teoría de conjuntos (II)

- Dada una relación R cualquiera entre los conjuntos X e Y:
  - Dado el subconjunto $A \subset X$, se puede inferir el subconjunto $B \subset Y$, $B=\{y \in Y \ / \ \langle x,y \rangle \in R, \ x \in A\}$



Función característica

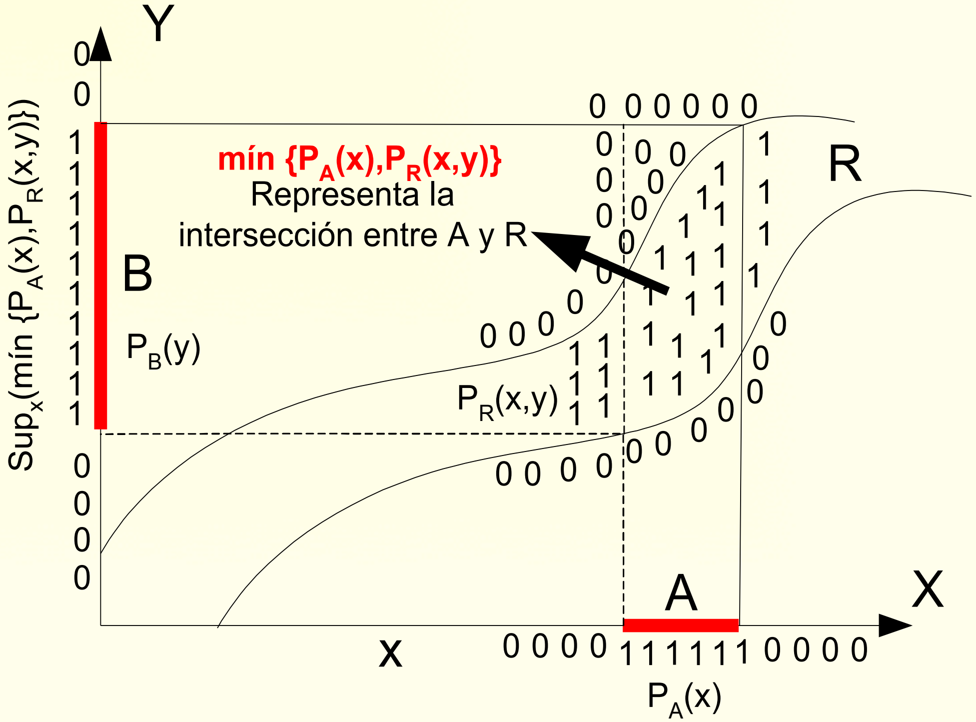
- Se define la función característica de un conjunto A, $P_A(x)$, a una función de pertenencia definida:
  - $P_A(x)=1$, si $x \in A$
  - $P_A(x)=0$ en otro caso.

Para todos los valores de x (por cada fila) se obtiene el supremo

$$\mathrm{Sup}_x(\text{mín } P_A(x), P_R(x,y))$$

Se obtiene la fórmula:

$$P_B(y) = \underset{x \in X}{\mathrm{Sup}}\left\{\text{mín}\left\{P_A(x), P_R(x,y)\right\}\right\}$$



Regla composicional de inferencia

- Partiendo de la expresión anterior:
  - $P_B(y) = \operatorname*{Sup}_{x \in X} \left\{ \text{mín} \{ P_A(x), P_R(x,y) \} \right\}$
- Generalizando para conjuntos difusos:
  - $\mu_B(y) = \operatorname*{Sup}_{x \in X} \left\{ \text{mín} \{ \mu_A(x), \mu_R(x,y) \} \right\}$
- La intersección puede emplear una T-norma cualquiera:
  - $\mu_B(y) = \operatorname*{Sup}_{x \in X} \left\{ T\left(\mu_A(x), \mu_R(x,y) \right) \right\}$
- Si R puede ser una relación de implicación:
  - Regla Composicional de Inferencia (RCI)

$$\mu_{B'}(y) = \operatorname*{Sup}_{x \in X} \left\{ T\left(\mu_{A'}(x), \mu_{A \to B}(x,y) \right) \right\}$$

Modus ponens generalizado

- Con la RCI, se puede hacer inferencia con modus ponens:
  - Regla: Si X es A, entonces Y es B
  - Hecho: X es A.
  - Conclusión: Y es B
- En lógica difusa se puede generalizar al no requerir X es A, sino X es A':
  - Modus ponens generalizado:
    - Regla: Si X es A, entonces Y es B
    - Hecho: X es A'
    - Conclusión: Y es B'
  - La función de posibilidad de $\mu_{B'}$ se calcula con RCI.

Inferencia difusa con RCI

- Datos: X es A: $\mu_A(x)$, Y es B: $\mu_B(y)$, X es A': $\mu_{A'}(x)$
- Objetivo: cálculo $\mu_{B'}(y)$

1. Calcular $\mu_{A \to B}(x,y)$ a partir de $\mu_A(x)$ y $\mu_B(y)$
   - Es necesario realizar las extensiones cilíndricas: $\mu_A(x)$ con y, $\mu_B(y)$ con x
   - Se emplea para la implicación cualquier función J(x,y). Zadeh: $J(x,y)=\text{máx}\ \{1-x,\ \text{mín}(x,y)\}$.
2. Calcular $T(\mu_{A'}(x),\ \mu_{A \to B}(x,y))$.
   - Se realiza la extensión cilíndrica de $\mu_{A'}(x)$ con y.
   - Se emplea una T-norma. $T(x,y) = \text{mín}\ (x,y)$.
3. Calcular el supremo en x de $T(\mu_{A'}(x),\ \mu_{A \to B}(x,y))$, que está en función de x e y.
   - Se obtiene la distribución de posibilidad sobre la dimensión y: $\mu_{B'}(y)$, es decir, las posibilidades de y es B'.

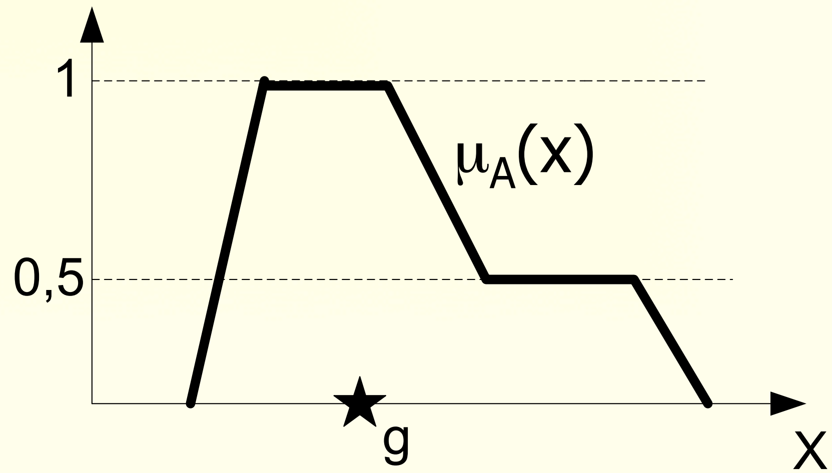
Motor de inferencia difuso

- Base de conocimiento:
  - R1: Si X es A_1, entonces Y es B_1.
  - R2: Si X es A_2, entonces Y es B_2.
  - ....
  - Rn: Si X es A_n, entonces Y es B_n.
  - Hecho: X es A'
- Se aplica la RCI a cada regla, obteniendo:
  - $\mu_{B1'}(y)$, $\mu_{B2'}(y)$, ..., $\mu_{Bn'}(y)$.
- A partir de las distribuciones anteriores, se calcula la distribución final y es B' mediante la t-conorna S.
  - $\mu_{B'}(y)=S(\mu_{B1'}(y), \mu_{B2'}(y), ..., \mu_{Bn'}(y))$.

Desborrocificación
Método del centro de gravedad

- Cálculo de la proyección en el eje x del centro de gravedad de la distribución.
- Se debe muestrear suficientemente fino para cubrir adecuadamente la función.
- Un muestreo excesivo exige gran carga computacional.
- Para generalizar $\mu_A(x) = \mu_{B'}(y)$

$$g = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^{N} \mu_A(x_i)}$$



Desborrocificación
Método $\sum_{cuenta}$

- Objetivo:
  - Dado un conjunto de distribuciones de posibilidad $\mu_{B1}(x), \mu_{B2}(x), \ldots, \mu_{Bn}(x)$
  - Encontrar qué $\mu_{Bi}(x)$ se parece más a una dada $\mu_A(x)$.
- La $\sum_{cuenta}$ es una medida proporcional al área de la distribución.
  - Se basa en la discretización de la función de distribución.
  - $\sum_{cuenta}(A) = \sum_{i=1}^{N} \mu_A(x_i)$
- El método elige como más parecido a $\mu_A(x)$ aquélla $\mu_{Bi}(x)$ que máximiza:

$$\sum_{cuenta}(B_i/A) = \frac{\sum_{cuenta}(A \wedge B_i)}{\sum_{cuenta}(B_i)}$$

Desborrocificación
Método de la distancia

- Objetivo:
  - Dado un conjunto de distribuciones de posibilidad: $\mu_{B1}(x)$, $\mu_{B2}(x)$, ..., $\mu_{Bn}(x)$
  - Encontrar qué $\mu_{Bi}(x)$ se parece más a una dada $\mu_A(x)$.
- Se emplea una función distancia definida como:

$$d_i = \sqrt{\alpha \cdot (B_i - A)^2 + \beta \cdot (g_i - g)^2}$$

  - B_i y A son, respectivamente, las áreas de $\mu_{Bi}(x)$ y $\mu_A(x)$.
  - g_i y g son, respectivamente, los centros de gravedad de $\mu_{Bi}(x)$ y $\mu_A(x)$.
  - α y β son dos constantes: $\alpha + \beta = 1$.
- El método elige como más parecido a $\mu_A(x)$ aquella $\mu_{Bi}(x)$ que minimiza d_i.

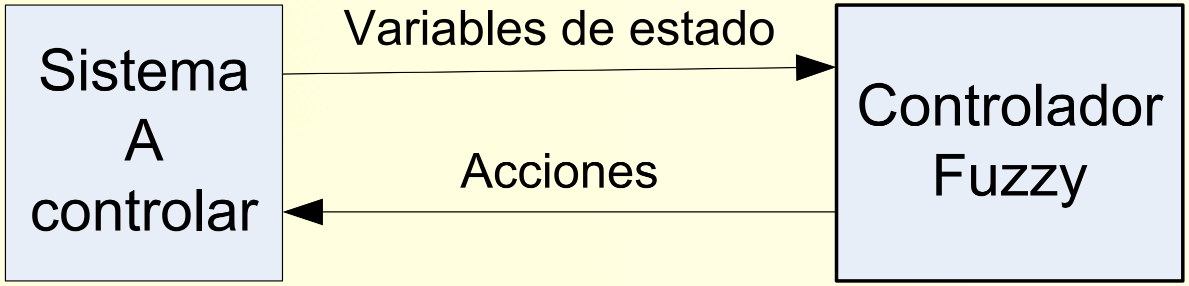
Índice
Representación con imprecisión

- Fundamentos de lógica difusa
- Razonamiento en lógica difusa
- Controladores difusos

Controladores difusos

- Se emplean para controlar sistemas inestables.
- El control tiene por objeto garantizar una salida en el sistema a pesar de las perturbaciones que le afectan.
- Ejemplos:
  - Sistemas de navegación.
  - Sistemas de climatización.
  - Sistemas de ventilación (túneles, garajes).

Esquema control difuso



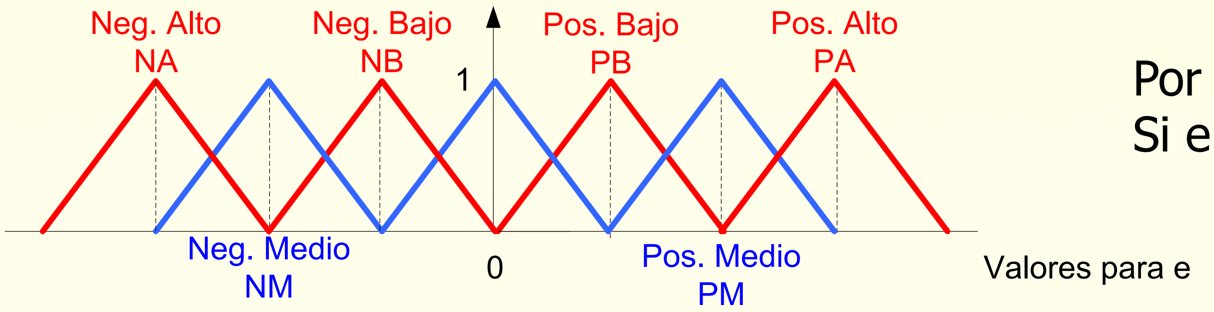
- Variables de estado:
  - $s_1, s_2, \ldots, s_n$: estado del sistema. Temperatura.
  - $e_1, e_2, \ldots, e_n$: desvíos (error) con respecto al valor de referencia. Temperatura con respecto a 20 ºC.
  - $\Delta e_1, \Delta e_2, \ldots, \Delta e_n$: tendencia del error.
  - $u_1, u_2, \ldots, u_m$: estado del elemento a controlar (actuador). Apertura de válvula, caudal de gas.
- Acciones:
  - $v_1, v_2, \ldots, v_m$: cambios e realizar en los actuadores. Abrir o cerrar en un cierto grado válvula o caudal de gas.

Modelo de control difuso

- Los valores de las variables de estado y acciones pueden ser etiquetas lingüísticas (valores cualitativos) que son representados por funciones de posibilidad:

Si s_1=A_1, …, e_1=B_1, …,Δe_1=C_1, …, u_1=D_1, …, entonces v_1=E_1, …

- En lo que sigue, se utilizarán reglas del tipo:
  - Si e=A y Δe=B, entonces v = C
  - Cada valor de e, Δe y v serán etiquetas lingüísticas con su correspondiente función de posibilidad. Por ejemplo, para e:



Por ejemplo:
Si e = NB

Notación

- Dada la regla: Si e=A y Δe=B, entonces v = C
  - A, B y C son funciones de posibilidad:
  - $\mu_A(e)$, $\mu_B(\Delta e)$, $\mu_C(v)$
- La notación será la siguiente:
  - Si e = A(e) y Δe=B(Δe), entonces v = C(v)
- Un controlador difuso posee una base de conocimiento de reglas del tipo:
  - R1: Si e = A_1(e) y Δe=B_1(Δe), entonces v = C_1(v)
  - R2: Si e = A_2(e) y Δe=B_2(Δe), entonces v = C_2(v)
  - …
  - Rn: Si e = A_n(e) y Δe=B_n(Δe), entonces v = C_n(v)

  - En un momento el estado del sistema es:
    - e = A(e) y Δe=B(Δe).
  - Tras un proceso de inferencia, el controlador responde para mantener el equilibrio: v = C(v)

Regla composicional de inferencia

- El proceso de inferencia emplea la regla composicional de inferencia:

$$\mu_{B'}(y) = \operatorname*{Sup}_{x \in X}\left\{T\left(\mu_{A'}(x), \mu_{A \to B}(x, y)\right)\right\}$$

  - y es v. La acción a tomar.
  - x es bidimensional: e y Δe.
  - $\mu_{B'}(y) = C(v)$. Distrib. de posib. de la acción a tomar.
  - $\mu_{A'}(x) = A(e) \wedge B(\Delta e)$. Estado actual del sistema.
  - $\mu_{A \to B}(x,y)$ = Ri: $A_i(e) \wedge B_i(\Delta e) \to v = C_i(v)$

$$C(v) = \operatorname*{Sup}_{e, \Delta e}\left\{T\left(A(e)^\wedge B(\Delta e), A_i(e)^\wedge B_i(\Delta e) \to C_i(v)\right)\right\}$$

Inferencia en controladores (I)

- Se emplea T (x,y) = mín (x,y).
- J (x,y) = mín (x,y). Mamdani.

$$\mathrm{C(v)} = \underset{e,\Delta e}{\mathrm{Sup}}\left\{\mathrm{T}\left(\mathrm{A(e)}\wedge\mathrm{B(\Delta e)}, A_{\mathrm{i}}(e)\wedge B_i(\Delta e) \rightarrow C_i(v)\right)\right\}$$

$$\mathrm{C(v)} = \underset{e,\Delta e}{\mathrm{Sup}}\left\{\mathrm{m}\acute{\imath}n\left(\mathrm{mín(A(e),B(\Delta e))}, \mathrm{mín(mín(}A_{\mathrm{i}}(e), B_i(\Delta e)), C_i(v))\right)\right\}$$

Asociatividad:

$$\mathrm{C(v)} = \underset{e,\Delta e}{\mathrm{Sup}}\left\{\mathrm{m}\acute{\imath}n\left(\mathrm{mín(mín(A(e), B(\Delta e)), mín(}A_{\mathrm{i}}(e), B_i(\Delta e))), C_i(v)\right)\right\}$$

$$\mathrm{C(v)} = m\acute{\imath}n\left(\underset{e,\Delta e}{\mathrm{Sup}}\left\{\mathrm{m}\acute{\imath}n\left(\mathrm{mín(A(e), B(\Delta e)), mín(}A_{\mathrm{i}}(e), B_i(\Delta e))\right)\right\}, C_i(v)\right)$$

$$\mathrm{C(v)} = m\acute{\imath}n\left(m\acute{\imath}n\left(\underset{e}{\mathrm{Sup}}\left\{\mathrm{m}\acute{\imath}n\left(\mathrm{A(e), A_i(e)}\right)\right\}, \underset{\Delta e}{Sup}\left\{\mathrm{mín(}B(\Delta e), B_i(\Delta e))\right\}\right), C_i(v)\right)$$

Inferencia en controladores (II)

Entrada al sistema Entrada al sistema

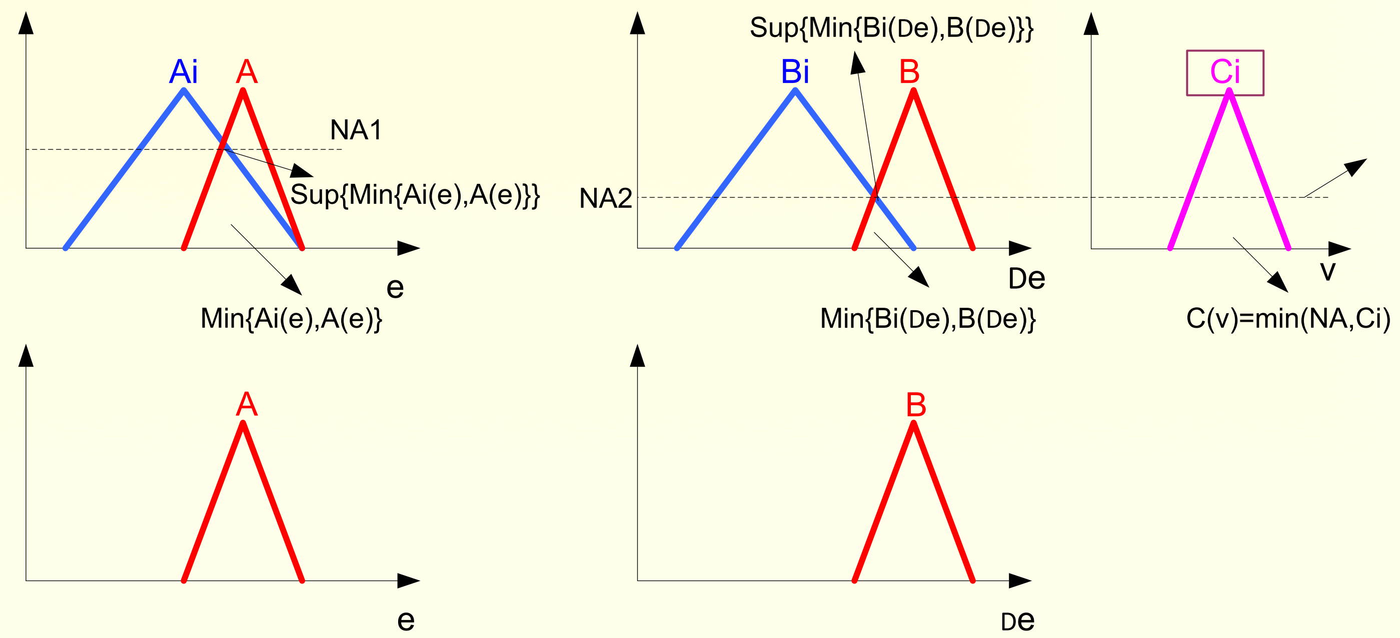
$$C(v) = mín\left(mín\left(\sup_{e}\left\{ mín\left(A(e), A_i(e) \right) \right\}, \sup_{\Delta e}\left\{ mín\left(B(\Delta e), B_i(\Delta e) \right) \right\} \right), C_i(v) \right)$$

Antecedente regla Antecedente regla

$$C(v) = mín\left(mín\left(NA_1, NA_2 \right), C_i(v) \right)$$

$$C(v) = mín\left(NA, C_i(v) \right)$$

Interpretación geométrica



Procedimiento general

- Dada una base de conocimiento:
  - R1: Si e = A_1(e) y Δe=B_1(Δe), entonces v = C_1(v)
  - …
  - Rn: Si e = A_n(e) y Δe=B_n(Δe), entonces v = C_n(v)
  - Hecho: e = A(e) y Δe=B(Δe).
  - Objetivo: v = C(v)
- Procedimiento:
  1. Para cada regla Ri, se obtiene:
     - $NA=\text{mín}\{Sup_e[\text{mín}(A(e),A_i(e))],Sup_{\Delta e}[\text{mín}(B(\Delta e),B_i(\Delta e))]\}$
     - La distribución del consecuente $C_i'(v)=\text{mín}(NA,C_i(c))$
  2. Se obtiene la unión: de los Ci' (v) de las reglas que se disparan
     - $C(v) = \cup_i \{C'_i(v)\} = \text{máx}_i \{C'_i(v)\}$
  3. Desborrocificación de C(v)